

Fixpunktgleichungen

Viele Gleichungen können mit einer Umformung zu einer sog. Fixpunktgleichung annähernd gelöst werden. Dabei wird die Gleichung so umformuliert, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die gesuchte Größe alleine steht. Beispiel:

$$3x^2 + 15x = 18$$

wird zu

$$x = (18 - 3x^2) / 15$$

Um die Gleichung mit einer Fixpunktiteration zu lösen, wird zunächst die Variable x mit einem beliebigen Startwert (z. B. $x=2$) initialisiert. Nun verwenden wir die zweite Form der Gleichung und überschreiben x solange mit dem rechten Teil der Gleichung (hier $x := (18 - 3x^2)/15$), bis sich der Wert von x nicht mehr oder nur noch marginal verändert. Das so gefundene x löst zumindest die zweite Form der Gleichung. Mit diesem Resultat kann nun auch die 1. Gleichung überprüft werden.

Bemerkungen: Längst nicht alle Gleichungen haben einen Fixpunkt in obigem Sinne. Zudem können schlechte Startwerte (hier z. B. -10) dazu führen, dass die Fixpunktlösung nicht gefunden wird, denn x wird mit jedem Schritt weiter von der Lösung entfernt. Zu guter Letzt ist zu erwähnen, dass bei Gleichungen mit mehreren Lösungen (wie die obige) natürlich bei einem gegebenen Startpunkt nur jeweils eine Lösung gefunden werden kann.

Lösen Sie mit diesem Verfahren die folgenden Gleichungen

$$3x^2 + 15x = 18 \text{ (mit Startwerten } x = 2 \text{ bzw. } x = -10)$$

$$\sin(x) = x - 0.2$$

$$1 - \ln(x) = 6 - x$$

$$3x^3 = 6x^2 - x + 1$$

Author: Philipp G. Freimann
(BBW
(Berufsbildungsschule
Winterthur)
<https://www bbw.ch>)